

[21-BA 428-B/21-BS 432-B]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – IV(B) – LINEAR ALGEBRA

(COMMON FOR B.A., B.Sc.)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time: 3 Hours

Max. Marks: 75

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

1. Show that the vector $\alpha = (2, -5, 3)$ in $V_3(R)$ can not be expressed as a linear combination of the vectors $e_1 = (1, -3, 2)$, $e_2 = (2, -4, -1)$ and $e_3 = (1, -5, 7)$.

$V_3(R)$ లోని $\alpha = (2, -5, 3)$ అనే సదిశను $e_1 = (1, -3, 2)$, $e_2 = (2, -4, -1)$ మరియు $e_3 = (1, -5, 7)$ అనే సదిశల యొక్క ఋజు సంయోగముగా వ్రాయలేము అని చూపండి.

2. If α, β, γ are linearly independent vectors in $V(R)$, then show that $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ are also linearly independent.

$V(R)$ లో α, β, γ లు ఋజు స్వాతంత్ర్యవైతే $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ లు కూడా ఋజు స్వాతంత్ర్యవైతే చూపండి.

3. Show that the mapping $T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ defined as $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, a_1 - a_3)$ is a linear transformation.

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ అనే ప్రమేయాన్ని $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, a_1 - a_3)$ గా నిర్వచిస్తే T ని ఋజుపరివర్తనమని చూపుము.

4. Prove that $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T: U \rightarrow V$ is a linear transformations, then the Null space $N(T)$ is a subspace of $V(F)$.

$U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు $T: U \rightarrow V$ ఋజుపరివర్తనమైతే, $V(F)$ కి సూన్యంతరాళం $N(T)$ ఉపాంతరాళమని చూపండి.

5. Show that $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ is a basis for $M_{2 \times 2}(R)$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ అనేది $M_{2 \times 2}(R)$ కి ఆధారంను ఏర్పరుస్తుందని చూపండి.

6. Find the coordinates of $(2i, 3 + 4i, 5i)$ w.r. to the basis $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ of $C^3(C)$.

$C^3(C)$ కి $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ఆధారమైతే $(2i, 3 + 4i, 5i)$ కు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

7. State and prove parallelogram law in inner product space.

అంతర్గజ్జలలో సమలంబ చతుర్భుజ నియమాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

8. Show that the system of equations $x - 4y + 7z = 14$; $3x + 8y - 2z = 13$; $7x - 8y + 26z = 5$ are inconsistent.

$x - 4y + 7z = 14$; $3x + 8y - 2z = 13$; $7x - 8y + 26z = 5$ సమీకరణాలు పాఠశా నియమాన్ని పాటించవని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions.

Each question carries 10 marks.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space and let $W \subseteq V$. Prove that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V are

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in f, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

$V(F)$ సదిశాంతరము మరియు $W \subseteq V$ అనుకొనుము. V కి W ఉపాంతరాళము కావడానికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు.

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in f, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$ అని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that the union of two subspaces of a vector space is a subspace if and only if one is contained in the other.

సదిశాంతరాళం యొక్క రెండు ఉపాంతరాళంల సముచ్చయం ఉపాంతరాళం కావడానికి అవశ్యక

పర్వా నియమము ఒకటి యింకొక దానిని కలిగి వుండునని నిరూపించండి.

10. (a) Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space. Prove that any two basis of V have the same number of elements.

$V(F)$ పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము అయితే V యొక్క ఏ రెండు ఆధారాల్లో అయిన

సదిశల సంఖ్య సమానమని నిరూపించండి.

Or

(b) If w_1 and w_2 are two sub-spaces of finite dimensional vector space $V(F)$, then show that $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$.

పరిమిత సదిశాంతరాళం $V(F)$ లో w_1 మరియు w_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే

$\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$ అని నిరూపించండి.

11. (a) State and prove Rank-Nullity theorem.

కోటి- శూన్యత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Let $T : V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ be defined by $T(a, b, c) \equiv (3a, a - b, 2a + b + c)$ then prove that $(T^2 - I)(T - 3I) = \bar{0}$.

$T : V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ ని $T(a, b, c) \equiv (3a, a - b, 2a + b + c)$ గా నిర్వచించిన

$(T^2 - I)(T - 3I) = \bar{0}$ అని నిరూపించండి.

12. (a) Find the eigen values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

యొక్క లాక్షణిక మూలాలు మరియు లాక్షణిక సదిశలు కనుగొనండి.

Or

(b) State and prove Cayley – Hamilton theorem.

కేలీ- హామిల్టన్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

13. (a) State and prove Cauchy- Schwarz inequality.

కోషి - సాచ్వర్జ్ అసమానతను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

Or

(b) Applying Gram-Schmidt process, find an orthonormal basis $R^3(R)$ from the basis $\{(2,0,1), (3,-1,5), (0,4,2)\}$.

$R^3(R)$ ఆధారము $\{(2,0,1), (3,-1,5), (0,4,2)\}$ కు గ్రామ్-స్కీడ్ ప్రక్రియ ఉపయోగించి లంబాభిలంబ సమితిని కనుగొనుము.